TakiAcademy
www.takiacademy.com

Monotonie d'une Suite _ Méthode 4

Soit U une suite réelle définie par $U_{n+1} = f(U_n)$ où f est une fonction définie sur un intervalle I à valeur dans I.

Comparer les deux premiers termes et émettre une **Conjecture** sur le sens de variation et par la suite on montre par récurrence notre Conjecture.

4) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{4+U_n} \end{cases}$$

Situation : Si la suite est définie par récurrence et que les autres méthodes n'aboutissent pas, on peut utiliser une démonstration par récurrence pour prouver la monotonie de la suite.

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

Rep :

Etape ① : on étudie les premiers termes de la suite pour conjecturer la monotonie éventuelle de la suite.

on a : $U_0 = 0$; $U_1 = \sqrt{0+4} = 2$

Comme $0 < 2$ on peut **Conjecturer** que la suite est croissante.

Etape ② : Démontrer la Conjecture Par récurrence.

on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1}$

• Initialisation :

pour $n = 0$ on a bien $0 \leqslant U_0 \leqslant U_1$

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1}$ et montrons que $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2}$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

on a : $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1}$

donc $4 \leqslant 4+U_n \leqslant 4+U_{n+1}$

Comme la fonction racine carré est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

on obtient : $2 \leqslant \sqrt{4+U_n} \leqslant \sqrt{4+U_{n+1}}$

d'où $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2}$

•) Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \leqslant U_{n+1}$

on peut donc conclure que la suite est croissante.

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815